

Sommario

In questa memoria relazionerò brevemente sullo *status* corrente di uno studio iniziato nell'agosto 2003 nel tentativo di dedurre la Meccanica Quantistica da principi puramente operazionali. Dopo aver brevemente menzionato i precedenti tentativi di altri autori (non andati in porto), si presenta il formalismo generale delle teorie probabilistiche, delle quali la Meccanica Quantistica è un caso molto speciale. Si pongono quindi alcuni postulati operazionali che riducono drasticamente la complessità della sperimentabilità, prevedendo di preparare tutti gli stati bipartiti e calibrare tutte le trasformazioni con l'ausilio di un unico stato puro bipartito (che giuoca il ruolo dello stato entangled). Si riassumono alcune conseguenze di tali postulati, e si prospettano possibili ulteriori postulati ancora da analizzare.

In this note I briefly report on the current status of a study initiated in august 2003, in the attempt to derive Quantum Mechanics from purely operational axioms. After shortly mentioning similar previous attempts by other authors—all unsuccessful—I will present the general formalism of all probabilistic theories, among which Quantum Mechanics occupies a very special place. I will then pose some simple postulates that are crucial in drastically reducing the complexity of experimentation, allowing *e. g.* to prepare all possible bipartite states and to calibrate all transformations using a single pure bipartite state (which plays the role of entanglement). Some consequences of these postulates are reviewed, and further possible postulates to be analyzed are presented.

Da quali principi discende la Meccanica Quantistica?*

Giacomo Mauro D'Ariano †

3 luglio 2009

Illustri Colleghi, illustri Colleghe,

colgo l'opportunità ed il privilegio di essere socio corrispondente di questa Accademia per parlarvi di un argomento che personalmente ritengo di notevole rilievo scientifico: il problema della fondazione assiomatica della Meccanica Quantistica. La Meccanica Quantistica, come tutti sapete, è la struttura teorica su cui si basa tutta la fisica contemporanea, a tutte le scale di grandezza e di energia—dal mondo microscopico alla cosmologia—in tutti i domini fisici—elettrodinamica, fisica nucleare, gravitazione—e stà alla base della tecnologia contemporanea della fotonica, superconduttori, superfluidi, e nanotecnologia. Nata il 14 dicembre del 1900 con la fisica dei quanti presentata in una memoria da Max Planck alla Società di Fisica Tedesca a Berlino, ha ormai più di cent'anni, e in tutto questo tempo non è mai stata contraddetta da nessuna evidenza sperimentale. Al contrario, ha portato a predizioni con un'accuratezza senza precedenti, come ad esempio nell'ambito dell'elettrodinamica con il valore del momento magnetico anomalo dell'elettrone. Eppure, nonostante la sua infallibilità, accuratezza, e predittività, la Meccanica Quantistica, a differenza di altre teorie fisiche quali, ad esempio, la Relatività, non si fonda su principi fisici, bensì su una struttura assiomatica puramente matematica, i cui elementi essenziali—spazi di Hilbert e algebre di operatori—sono oggetti matematici che, pur permettendo di calcolare le quantità osservate, non hanno essi stessi significato sperimentale diretto, e non possono essere misurati sperimentalmente. In una teoria fisica ci si aspetta che la teoria stessa e, di conseguenza, la sua struttura matematica, siano derivate da principi fisici sperimentali—come accade, ad esempio, nella teoria della Relatività, ove le trasformazioni di Lorentz sono derivate dal principio di relatività (l'indipendenza delle leggi fisiche dal sistema di riferimento e il limite superiore alle velocità rappresentato dalla velocità della luce). Ciò non avviene affatto per la Meccanica Quantistica, la cui struttura matematica non è derivata da principi fisici. Il dualismo onda-corpuscolo

*Memoria presentata all'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, nell'Adunanza del 31 gennaio 2008.

†Dipartimento di Fisica "A. Volta", via Bassi 6, I-27100 Pavia, Italy, <http://www.qubit.it>

e la “complementarità” di Bohr—e menchè mai il cosiddetto principio di indeterminazione di Heisenberg—non rappresentano certo principi da cui si deduce la teoria, bensì sono conseguenze della teoria. Questa stato di cose diviene particolarmente imbarazzante quando la Meccanica Quantistica viene insegnata per la prima volta nei corsi universitari. Allo studente viene chiesto un vero e proprio atto di fede, che a posteriori sarà confortato dalle corrette predizioni sperimentali. E la mancanza di una assiomatica basata su leggi/principi fisici è la ragione principale per la quale la Meccanica Quantistica risulta così misteriosa, tanto che lo stesso Richard Feynman sosteneva di non averla completamente compresa.

A questo punto sorge ovvia la domanda se sia invece possibile derivare la Meccanica Quantistica da principi fisici, e non matematici: questo è appunto l'argomento della mia presente nota.

Sicuramente qualcuno di voi si chiederà se questo problema sia mai stato affrontato in cento anni di vita della teoria. In realtà alcuni tentativi ci sono stati, a partire dallo stesso von Neumann—al quale è dovuta l'attuale formulazione matematica della Meccanica Quantistica. Von Neumann in un lavoro congiunto con Birkhoff tentò di riconciliare l'apparente inconsistenza della logica Booleana classica con la complementarità delle osservazioni (vedi posizione-momento) della Meccanica Quantistica. Dopo circa vent'anni di disinteresse, il problema è poi stato rivitalizzato da George Mackey, dando luogo alla nascita della *Quantum Logic*, che ha coinvolto vari fisici teorici, logici, nonchè filosofi. Il lavoro di Mackey è stato esteso significativamente da Piron. Ma, alla fine, a detta di tutti, l'obiettivo di una *assiomatizzazione operativa* è fallito, nonostante successivi notevoli studi di autori, fra i quali spicca la scuola di Ludwig in Germania [1]. In realtà, se confrontata con l'enorme sviluppo scientifico determinato dalla Meccanica Quantistica, la ricerca sui suoi fondamenti assiomatici è stata molto sporadica, e ciò è a mio parere la causa principale del fallimento del programma di assiomatizzazione. In questo ha senz'altro avuto influenza nefasta l'annoso e inconclusivo dibattito sulle diverse interpretazioni (si veda il paradosso del Gatto di Schrödinger e il problema del collasso della funzione d'onda), dibattito che condusse a posizioni iper-pragmatiche, ben sintetizzate dal *dictum* di Feynman “*Shut up and calculate!*”¹, pragmatismo alla base del dogmatismo imperante degli spazi di Hilbert, e del disinteresse (e talvolta denigrazione) nei riguardi della ricerca sull'assiomatica. Ma cosa c'è di scientificamente più corretto e motivato del cercare di dedurre la teoria da *principi operazionali*? E cosa c'è invece di più speculativo dell'utilizzarne la costruzione matematica senza comprenderla, solo sulla base della sua predittività?

Possibili principi per la Meccanica Quantistica

Il grado di generalità della Meccanica Quantistica la colloca ad un livello più elevato di quello di una teoria fisica, poichè, in quanto teoria della misurazione,

¹Questa affermazione che tutti generalmente attribuiscono a Richard Feynman, sembra invece sia stata usata per la prima volta da David Mermin (vedi N. D. Mermin, *Physics Today Could Feynman Have Said This?* **57**, Issue 5, May 2004, pag. 10

essa rappresenta una sorta di “manuale sintattico dell’esperimento” per ogni possibile teoria fisica. Si potrebbe pensare che la Meccanica Quantistica non sia un accidente del nostro universo immanente, così come esso è fatto, bensì lo trascenda, quasi essa sia una necessità logica, l’insieme dei principi alla base della sperimentabilità stessa, della conoscibilità. In effetti è con la Meccanica Quantistica che per la prima volta si affronta alla radice il *problema della misurazione*, problema centrale della fisica in quanto scienza sperimentale. Non si intende qui la descrizione della strumentazione di un esperimento specifico, bensì la teoria stessa del processo generale di estrazione di *informazione* che avviene nella misurazione, attraverso l’interazione del sistema fisico misurato con l’apparato sperimentale. Si potrebbe dire che la Meccanica Quantistica concerne precisamente la descrizione stessa dell’esperimento fisico, ed essendo quest’ultimo un vero e proprio archetipo epistemologico, prototipo di atto cognitivo di interazione con la realtà, la Meccanica Quantistica diviene una sorta di epistemologia in miniatura. Il problema della comprensione della Meccanica Quantistica va quindi ben al di là della teoria scientifica, e sfocia nell’epistemologia. E, in effetti, la necessità di derivare la Meccanica Quantistica da principi puramente operazionali è dettata dalla ricerca dei limiti di principio alla conoscibilità di ciò che ci circonda, e alla necessità di stabilire connessioni logiche dirette fra numerose questioni epistemiche, quali: località, causalità, complementarità, incompatibilità di osservazioni diverse, controfattualità, interpretazioni diverse della probabilità, olismo *versus* riduzionismo, complessità algoritmica e sperimentale, acquisibilità trasmissibilità comprimibilità elaborabilità e segretezza dell’informazione, (vedi quantum computing e crittografia). E capire le connessioni logiche dirette fra questi aspetti significa evitare il *detour* matematico della Meccanica Quantistica, come invece si deve fare tutt’oggi.

In questa memoria parlerò brevemente di un mio tentativo di dedurre la Meccanica Quantistica da principi puramente operazionali. Questo lavoro procede ormai dall’agosto del 2003, grazie alla generosità di scienziati internazionali che hanno supportato le mie ricerche in modo completamente disinteressato. Ha fino ad ora occupato solo una piccola parte del mio tempo dedicato alla ricerca, il cui settore canonico è invece la *Quantum Information*. Il lavoro non è ancora concluso, ma spero sia prossimo alla conclusione. Alla base della presente assiomatizzazione è la definizione stessa di *esperimento* (nella letteratura chiamato tecnicamente *test*), e molte idee sono state mutate dalle mie ricerche recenti di Tomografia Quantistica [2, 3, 4], una nuova tecnica universale che permette di determinare sperimentalmente oggetti della Meccanica Quantistica quali stati e trasformazioni.

In questa memoria darò solo un breve resoconto dei miei studi più recenti sull’argomento: maggiori dettagli possono essere trovati sul mio contributo [5] ad un libro di imminente pubblicazione della Cambridge University Press.

Premessa generale sulla definizione di “esperimento”

Premessa generale alla presente assiomatizzazione è l’affermazione che si eseguono esperimenti per ottenere informazioni sullo stato di un sistema fisico, e

la conoscenza di tale stato permette di predire risultati di futuri esperimenti. Inoltre, poichè occorre necessariamente operare in condizioni di incertezza (conoscenza parziale *a priori* sia del sistema che dell'apparato) le regole per l'esperimento sono assegnate in ambito probabilistico.

L'**esperimento** (o **test**) su un **sistema** consiste nel farlo interagire con un apparato, il quale produrrà un **evento** segnalato dall'apparato sperimentale (il **risultato** dell'esperimento, in Inglese: *outcome*), evento fra un insieme di eventi possibili, ognuno dei quali può avvenire con una certa probabilità, e dalla cui conoscenza si ottiene informazione sullo stato del sistema oggetto all'inizio dell'esperimento. L'esperimento $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}\}$ viene quindi identificato con un insieme di eventi probabilistici \mathcal{A} . Si noti che lo stesso evento può appartenere a test diversi, e che il test deterministico contiene un solo evento. Gli eventi possono essere uniti $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ come si fa di solito in teoria della probabilità, e l'operazione di unione trasforma tests in nuovi tests, ovvero il test $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots\}$ diventa $\mathbb{A}' = \{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots\}$: questa operazione si chiama **coarse graining**.

Poichè per definizione la conoscenza dello "stato" del sistema permette di predire i risultati di esperimenti su tale sistema, allora lo **stato** ω per definizione è una regola di probabilità $\omega(\mathcal{A})$ per tutti i possibili eventi sperimentali \mathcal{A} . Per gli stati normalizzati si avrà $\omega(\mathcal{D}) = 1$ per ogni trasformazione deterministica \mathcal{D} . Tutti i possibili stati formano un insieme convesso—che denoteremo con \mathfrak{S} —e gli stati non normalizzati formano un cono—denotato con \mathfrak{S}_+ —del quale il convesso degli stati è una base. Infine, denoteremo con $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ lo spazio lineare reale generato dal cono \mathfrak{S}_+ .

Si introduce ora la nozione di **cascata temporale** di due tests \mathbb{A} e \mathbb{B} , corrispondente all'esecuzione dei due tests congiuntamente, e con la richiesta che la probabilità marginale sul test \mathbb{A} non dipenda dalla scelta del test \mathbb{B} , mentre viceversa generalmente la probabilità marginale sul test \mathbb{B} dipende dalla scelta del test \mathbb{A} . Questa richiesta corrisponde al seguente postulato:

Postulato 1 (No signaling from the future) *Non c'è condizionamento delle probabilità causato da eventi futuri, ovvero dall'esecuzione di test futuri.*

Il concetto stesso di cascata temporale e il connesso postulato 1 stabilisce la scelta della freccia tempo, ovvero il test 1 precede temporalmente il test 2. La congiunzione degli eventi $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$ nella cascata temporale definisce la **composizione degli eventi** $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ (tale regola di composizione è ovviamente non commutativa). Come vedremo, la composizione di eventi si rappresenterà con un prodotto di matrici. Il Postulato 1 è di importanza fondamentale per il calcolo delle probabilità, in quanto permette di introdurre la nozione di probabilità condizionata.

L'algebra delle matrici delle trasformazioni

A questo punto, come conseguenza della nostra definizione di esperimento e del solo Postulato 1, è possibile introdurre una descrizione a matrici degli eventi, e

gli eventi vengono identificati con trasformazioni. La logica della deduzione è la seguente. Si definisce lo **stato condizionato** $\omega_{\mathcal{A}}$ dall'evento \mathcal{A} (avvenuto precedentemente nella cascata) come la regola di probabilità condizionata dalla conoscenza dell'avvenuto evento \mathcal{A} , ovvero $\omega_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \omega(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})/\omega(\mathcal{A})$ e, per mettere in evidenza la variabile scriveremo $\omega_{\mathcal{A}} = \omega(\cdot \circ \mathcal{A})/\omega(\mathcal{A})$. A questo punto l'**evoluzione dello stato** viene identificata con il condizionamento, e l'evento viene identificato con una **trasformazione** dello stato. L'evento agisce come trasformazione dello stato dando la probabilità congiunta $\mathcal{A}\omega = \omega(\cdot \circ \mathcal{A})$. La trasformazione è lineare, in quanto si ha $\mathcal{A}(\omega_1 + \omega_2) = \mathcal{A}\omega_1 + \mathcal{A}\omega_2$.

Si hanno due tipi di equivalenza di trasformazioni: 1) **equivalenza di condizionamento**, che identifica trasformazioni che producono lo stesso cambiamento di stato, ovvero, $\omega_{\mathcal{A}} = \omega_{\mathcal{B}} \forall \omega$; 2) **equivalenza probabilistica**, che identifica trasformazioni che avvengono con la stessa probabilità per ogni stato $\omega(\mathcal{A}) = \omega(\mathcal{B}) \forall \omega$. La classe di equivalenza probabilistica è il cosiddetto **effetto** della Meccanica Quantistica. Nel seguito denoteremo gli effetti con le lettere minuscole a, b, c, \dots , e denoteremo con e l'effetto deterministico, che assegna la normalizzazione degli stati, ovvero $\omega(e) = 1 \forall \omega$. Gli effetti possono essere anche visti come funzionali positivi e limitati da 1 sugli stati. Gli effetti formano un insieme convesso—che denoteremo con \mathfrak{P} , e, rilassando la limitazione superiore, formano un cono—che denoteremo con \mathfrak{P}_+ . Inoltre, denoteremo con $\mathfrak{P}_{\mathbb{R}}$ lo spazio lineare reale generato dal cono \mathfrak{P}_+ . A differenza degli stati normalizzati, il convesso degli effetti non è una base del cono, bensì un suo troncamento. Supporremo che due stati diversi siano sempre discriminabili mediante un effetto, e che due effetti diversi siano sempre discriminabili mediante uno stato: questo, come vedremo più avanti, corrisponde al postulato della discriminabilità locale. Ne consegue che gli spazi $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ e $\mathfrak{P}_{\mathbb{R}}$ degli stati e degli effetti hanno la stessa dimensione.

Gli **eventi si possono** anche **sommare** ($\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ corrisponde all'unione $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ con gli eventi pensati all'interno dello stesso test) e **si possono moltiplicare per numeri** $\mathcal{A} \rightarrow \lambda\mathcal{A} \ 0 \leq \lambda \leq 1$ (corrispondentemente al riscaldamento della probabilità dell'evento). In questo modo si introduce una struttura di monoide convesso sugli eventi o trasformazioni, il quale genera un cono convesso con sovrainposta una legge di composizione interna, che genera a sua volta uno spazio lineare reale, che forma quindi un'algebra. Si costruisce quindi il cono generato dagli stati e il suo cono duale generato dagli effetti: questi coni spaziano a loro volta degli spazi lineari, su cui l'algebra delle trasformazioni opera come un'algebra di operatori. L'effettiva rappresentazione a matrici degli eventi e a vettori degli stati ed effetti può essere ottenuta utilizzando un test di riferimento $\mathbb{S} = \{\mathcal{S}_i\}$ fatto di trasformazioni \mathcal{S}_i ognuna delle quali prepara lo stato λ_i con probabilità data dall'effetto l_i , dove l'insieme degli stati è un set minimale "separante" (un set separante di stati permette di discriminare fra due effetti qualunque) e l'insieme degli effetti è minimale informazionalmente completo, ovvero essi corrispondono agli eventi di un test che permette di valutare lo stato del sistema—in altri termini tutte le probabilità si possono scrivere come combinazioni lineari delle probabilità degli eventi di tale esperimento (considereremo

per semplicità il caso di dimensione finita, per il quale è possibile dimostrare che esiste almeno un test informazionalmente completo minimale). È inoltre conveniente rappresentare stati ed effetti nello stesso spazio euclideo, e operare un cambiamento di base in modo che le basi $\{\lambda_i\}$ e $\{l_i\}$ siano biortogonali, ovvero $\lambda_i(l_j) = (l_j|\lambda_i) = \delta_{ij}$. Inoltre conviene scegliere le basi in modo che l'ultimo elemento della base di effetti sia l'effetto deterministico $l_N = e$, e corrispondentemente l'ultimo elemento della base di stati λ_N corrisponda alla direzione dell'asse del cono degli stati. In questo modo la matrice \mathbf{A} della trasformazione \mathcal{A} avrà la forma *orlata*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ \hat{\mathbf{a}}^\top & \hat{a} \end{pmatrix},$$

e il vettore $\mathbf{a} = (\hat{\mathbf{a}}, \hat{a})$ rappresenta l'effetto associato alla trasformazione (\hat{a} è la componente deterministica) e il vettore $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ rappresenta il vettore di traslazione nell'azione affine della trasformazione sul convesso degli stati $\widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}} = \hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\omega} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}$ (la trasformazione \mathcal{A} agisce linearmente sul cono degli stati, e in modo affine sul convesso). La probabilità della trasformazione nello stato $\boldsymbol{\omega}$ è data dal prodotto scalare $\omega(\mathcal{A}) \equiv \omega(a) = (a|\boldsymbol{\omega}) = \hat{\mathbf{a}}^\top\boldsymbol{\omega} + \hat{a}$ e il condizionamento è dato dalla trasformazione affine fratta $\hat{\boldsymbol{\omega}} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}} = \frac{\hat{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}}{\hat{\mathbf{a}}^\top\hat{\boldsymbol{\omega}} + \hat{a}}$.

L'algebra di matrici che abbiamo derivato non corrisponde necessariamente all'algebra delle trasformazioni della Meccanica Quantistica (si noti: non l'algebra delle trasformazioni, non l'algebra degli operatori), e tutte le diverse teorie probabilistiche hanno una diversa algebra di trasformazioni. L'obiettivo è ora quello di restringersi al caso della Meccanica Quantistica.

Sistemi indipendenti

In uno spirito completamente operativo, la nozione di **sistema** viene data in termini dei tests eseguibili su di esso, ovvero, per definizione, un sistema è una collezione di tests, chiusa per cascata, coarse-graining, condizionamento, e combinazione convessa. Denoteremo con $\mathfrak{S}(\mathbf{A})$ l'insieme degli stati del sistema \mathbf{A} , con $\mathfrak{P}(\mathbf{A})$ l'insieme degli effetti, con $\mathfrak{T}(\mathbf{A})$ l'insieme delle trasformazioni, e aggiungeremo il pedice $+$ per denotarne il cono convesso (ad esempio $\mathfrak{S}_+(\mathbf{A})$ è il cono convesso degli stati del sistema \mathbf{A}), ed il pedice \mathbb{R} per denotarne lo spazio lineare reale generato (ad esempio $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(\mathbf{A})$ è lo spazio lineare generato dal cono $\mathfrak{S}_+(\mathbf{A})$). L'insieme delle trasformazioni fisiche $\mathfrak{T}(\mathbf{A})$ sarà un sottinsieme del convesso delle contrazioni lineari del cono degli stati $\text{Contr}(\mathfrak{S}_+(\mathbf{A}))$,

ovvero $\mathfrak{T}(A) \subseteq \text{Contr}(\mathfrak{S}_+(A))$ (le contrazioni lineari del cono degli stati sono quelle trasformazioni lineari che preservano il cono e non aumentano la normalizzazione).

Si introduce quindi la nozione di **sistemi indipendenti**, intendendo che due sistemi sono indipendenti se è possibile eseguire su essi congiuntamente i loro rispettivi tests come **tests locali** per i quali l'ordine temporale dei tests è irrilevante. Si definisce quindi il **sistema composto** AB dei sistemi A e B come la collezione di tutti i test locali più ulteriori tests non locali, con la chiusura per cascata, coarse-graining, condizionamento, e combinazione convessa.

Nella nozione stessa di sistemi indipendenti è implicita l'**impossibilità di comunicare a distanza** fra i due sistemi eseguendo esperimenti locali.

Per un sistema composto si introduce quindi la nozione di **stato marginale**. Lo stato marginale $\omega|_n$ dell' n -esimo sistema è la regola di probabilità della trasformazione locale sul sistema n -esimo con tutti gli altri sistemi intoccati, ovvero $\Omega|_n := \Omega(\mathcal{I}, \dots, \mathcal{I}, \underbrace{\mathcal{A}}_{n\text{-th}}, \mathcal{I}, \dots)$.

Poichè non c'è restrizione alla preparabilità di stati fattorizzati e più generalmente separabili, si avrà sempre $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(AB) \supseteq \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(A) \otimes \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(B)$ e similmente per gli effetti. L'inclusione stretta si ha quando non vale la **discriminabilità locale**, ovvero quando esistono stati che diventano discriminabili solo con test nonlocali (o effetti che diventano discriminabili solo in stati congiunti). Questo accade, per esempio, nella meccanica quantistica su spazi di Hilbert con campo reale, anzichè complesso. Quando invece si ha l'uguaglianza vale la discriminabilità locale, e vale quindi anche l'**osservabilità locale**, ovvero è sempre possibile costruire un test informazionalmente completo per sistemi composti mediante test locali informazionalmente completi. Questo principio è di importanza cruciale per la sperimentabilità stessa, e riconcilia l'*olismo* con il *riduzionismo*, permettendo di osservare localmente un mondo olistico. Pertanto lo assumeremo come postulato:

Postulato 2 (Discriminabilità locale) *tutti gli stati locali sono separati da effetti locali, e tutti gli effetti locali sono separati da stati locali, e test congiunti non possono rendere distinguibili stati/effetti locali localmente indistinguibili.*

In conclusione, quando vale la discriminabilità locale, vale il prodotto tensoriale, e gli stati bipartiti sono anch'essi esprimibili mediante matrici, ad esempio $\Phi = \sum_{ij} \Phi_{ij} \lambda_i \otimes \lambda_j$.

Lo stato “fedele”

Si introducono ora le nozioni di stato bipartito **dinamicamente fedele** e **preparazionalmente fedele**. “Dinamicamente fedele” significa che lo stato non normalizzato $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{I})\Omega$ condizionato dalla trasformazione locale \mathcal{A} sul sistema 1 è in corrispondenza iniettiva con tale trasformazione \mathcal{A} , ovvero lo stato congiunto dopo la trasformazione locale la rappresenta fedelmente. Tale caratteristica dello stato è cruciale per la possibilità di “calibrare” l'esperimento—ovvero

determinarne le trasformazioni—ed è solo dalla conoscenza del dettaglio della trasformazione che è possibile ottenere informazione dall’esperimento. “Preparazionalmente fedele” significa che ogni possibile stato bipartito può essere ottenuto agendo sullo stato fedele con una trasformazione locale. Questa assunzione, corrispondente alla suriettività della precedente mappa dinamica, è anch’essa di importanza cruciale per la preparabilità di tutti i possibili stati a partire da un unico stato. Le due assunzioni assieme sono equivalenti all’isomorfismo fra il cono delle trasformazioni e quello degli stati bipartiti.

È semplice mostrare che uno stato simmetrico (ovvero invariante per permutazione dei due sistemi) preparazionalmente fedele è anche dinamicamente fedele. Inoltre è semplice vedere che per ogni teoria locale è sempre possibile costruire un insieme di trasformazioni fisiche $\mathfrak{T}(\mathbb{A}) \subseteq \text{Contr}(\mathfrak{S}_+(\mathbb{A}))$ e un completamento bipartito della teoria con uno stato simmetrico preparazionalmente fedele. Per far ciò si procede semplicemente introducendo lo stato dinamicamente fedele $\Phi \propto \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \otimes \lambda_i + c\lambda_N \otimes \lambda_N$ dove il coefficiente c viene preso sufficientemente grande in modo che $\Phi(a, b) \geq 0$ per tutti gli effetti locali a e b . Innanzitutto, l’insieme delle trasformazioni $\mathfrak{T}(\mathbb{A}) \subseteq \text{Contr}(\mathfrak{S}_+(\mathbb{A}))$ può sempre essere completato a contenere tutte le preparazioni di stato $|\zeta\rangle\langle a|$ che avvengono con effetto a e preparano lo stato ζ . Agendo localmente sullo stato Φ si avrà $(\mathcal{T}_\zeta \otimes \mathcal{I})\Phi = \zeta \otimes \omega_a$, dove $\omega_a = \Phi(a, \cdot)$. Se i coni \mathfrak{S}_+ e \mathfrak{P}_+ sono isomorfi, esiste sempre una scelta di basi tale che la mappa $\omega_a = \Phi(a, \cdot)$ sia un isomorfismo $\mathfrak{P}_+(\mathbb{A}) \simeq \mathfrak{S}_+(\mathbb{A})$ fra i due coni². Altrimenti è possibile modificare uno dei due coni per rendere la mappa un isomorfismo fra i due coni, possibilmente includendo nuovi stati non normalizzati ω_a derivanti dall’applicazione della mappa, o eliminando stati che non hanno un corrispondente effetto, rendendo quindi la mappa suriettiva. Tutto ciò avverrà automaticamente senza cambiare la dimensione del cono degli stati.

Ora, agendo localmente sullo stato $\Phi \in \mathfrak{S}(\mathbb{A}\mathbb{A})$ con un insieme di trasformazioni $\mathfrak{T}(\mathbb{A}) \subseteq \text{Contr}(\mathfrak{S}_+(\mathbb{A}))$ si costruiscono stati bipartiti $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{I})\Phi$. In questo modo, per costruzione, lo stato Φ risulterà anche preparazionalmente fedele (si ottengono da esso anche tutti gli stati separabili, in quanto abbiamo assunto che $\mathfrak{T}(\mathbb{A})$ contiene tutte le preparazioni di stato $|\zeta\rangle\langle a|$, e la mappa ω_a è suriettiva). L’insieme di trasformazioni locali scelte $\mathfrak{T}(\mathbb{A})$ preserveranno sia il cono degli stati del sistema singolo, che il cono degli stati bipartiti. Più grande sarà l’insieme di trasformazioni $\mathfrak{T}(\mathbb{A})$, più grande sarà il cono degli stati bipartiti $\mathfrak{S}(\mathbb{A}\mathbb{A})$ (i due coni sono isomorfi) e conseguentemente il cono duale degli effetti bipartiti si ridurrà. Il cono degli effetti bipartiti, d’altro canto, si costruisce a partire dall’effetto F con matrice $\alpha\Phi^{-1}$. La costante α si ottiene dalla condizione di parallelismo $(F|\Phi) = 1$. Si costruiscono quindi gli altri effetti $F(\mathcal{A} \otimes \mathcal{I})$ agendo con trasformazioni locali sull’effetto F . In questo modo può accadere che su alcuni stati gli effetti così costruiti diano probabilità negative: ciò è dovuto al fatto che si è scelto l’insieme delle trasformazioni $\mathfrak{T}(\mathbb{A})$ troppo grande. È sempre

²Un’isomorfismo fra due coni \mathbb{C}_1 e \mathbb{C}_2 è una mappa lineare invertibile fra i relativi spazi lineari che preserva il cono in entrambe le direzioni, o equivalentemente, che preserva il cono ed è suriettiva. Una tale mappa manda raggi estremali in raggi estremali, e combinazioni convesse in combinazioni convesse.

possibile però ridurre l'insieme $\mathfrak{T}(\mathbf{A})$ in modo da avere tutte le probabilità positive. In questo modo si ottengono coni isomorfi $\mathfrak{S}_+(\mathbf{AA}) \simeq \mathfrak{P}_+(\mathbf{AA})$, e la teoria è *debolmente selfduale* (la Meccanica Quantistica è selfduale, ovvero i coni degli stati e degli effetti di ogni sistema coincidono). Con la precedente costruzione, a partire da una teoria locale (assegnata dai coni degli stati e degli effetti) e con un cambiamento opportuno del cono degli stati, abbiamo quindi ottenuto una teoria debolmente self-duale, con coni di effetti e stati omogenei (ovvero azione transitiva su di essi delle trasformazioni), avente uno stato simmetrico dinamicamente e preparazionalmente puro, e con il suo inverso matriciale che rappresenta un effetto.

I Postulati fondamentali.

Abbiamo visto che, anche se con alcune variazioni, è sempre possibile costruire il primo livello nonlocale della teoria—ovvero il sistema bipartito—avendo uno stato ed un effetto bipartiti entrambi simmetrici e preparazionalmente e dinamicamente fedele. Ciò spiega come molte delle caratteristiche principali dello stato fedele (ci concentriamo per ora solo sullo stato) dipendono invero da caratteristiche locali della teoria. Ad esempio, dall'isomorfismo fra i coni $\mathfrak{T}_+(\mathbf{A}) \simeq \mathfrak{S}_+(\mathbf{AA})$ stabilito dalla mappa $\Psi_{\mathcal{A}} := (\mathcal{A} \otimes \mathcal{I})\Phi$, ne consegue che lo stato fedele sarà puro se e solo se la mappa identica \mathcal{I} è indecomponibile. Per esempio, per la teoria probabilistica classica, la mappa identica è decomponibile, e ne consegue che lo stato fedele è misto. Altre proprietà delle correlazioni fra due sistemi sono conseguenza diretta di proprietà locali, come ad esempio la violazione del bound classico CHSH, che è possibile solo in presenza di test locali incompatibili (vedi ref.[6]). Pertanto la sola esistenza di uno stato fedele rappresenterebbe un postulato debole, che include troppe teorie. Inoltre, l'esistenza di uno stato preparazionalmente fedele misto non rappresenterebbe una riduzione della complessità sperimentale. Postuleremo quindi:

Postulato 3 (Stato fedele) *Per due sistemi identici esiste uno stato bipartito simmetrico preparazionalmente fedele puro.*

Postuliamo anche:

Postulato 4 (Effetto fedele) *La matrice inversa dello stato fedele rappresenta un effetto bipartito fisico.*

Il secondo postulato equivale alla self-dualità debole anche al secondo livello.

Il Postulato 3 realizza una notevolissima riduzione della complessità sperimentale, in quanto permette di calibrare ogni trasformazione e di preparare ogni stato bipartito con un solo stato locale. Riguardo il Postulato 4 è facile vedere che l'effetto fedele $F = \alpha\Phi^{-1}$ permette di eseguire il teletrasporto probabilistico, e α rappresenta la probabilità di successo.

I precedenti due postulati eliminano molte delle teorie probabilistiche note, fra le quali le teorie classiche, le scatole di Popescu-Rohrlich [7], e le teorie

quantistiche complete sugli spazi di Hilbert reali. Restano comunque altre teorie, ad esempio le scatole di Popescu-Rohrlich sfrondate di tutti gli stati bipartiti nonseparabili puri (a parte lo stato fedele), e le teorie quantistiche su spazi di Hilbert reali incomplete.

Postulati in fase di studio

Un postulato molto promettente è la possibilità di purificare ogni stato, ovvero

Postulato 5 (Purificabilità di stati normalizzati) *Ogni stato normalizzato di un sistema ammette purificazione su due sistemi identici.*

Si potrebbe considerare anche il postulato ancora più forte

Postulato 6 (Purificabilità di ensembles di stati) *Ogni ensemble di stati locali di un sistema è purificato da uno stato congiunto con un altro sistema identico, e l'ensemble di stati viene ottenuto eseguendo un test locale sul sistema ancillare.*

In equazioni si ha

$$\begin{aligned} \forall \mathbb{E} := \{ \omega_i \in \mathfrak{G}(A), \sum \omega_i(e) = 1 \}, \\ \exists \Psi_{\mathbb{E}} \in \mathfrak{G}(AA) \text{ e } \mathbb{A} = \{ a_i \} \in \mathbf{A}, \quad \text{tali che} \\ \omega_i = \Psi_{\mathbb{E}}(\cdot, a_i). \end{aligned} \quad (1)$$

Si noti che, un automorfismo degli stati di un sistema lascia il sistema invariante (l'automorfismo corrisponde a una permutazione dei tests). Ne consegue che si hanno purificazioni diverse, modulo automorfismi locali sul sistema ancillare (in parole povere queste corrispondono a una diversa scelta della base).

Gli ultimi due postulati sono correntemente sotto studio. L'ultimo postulato, in particolare, ha fortissime conseguenze, quali una versione generale del teorema di Knill-Laflamme per l'error correction e del teorema di Ozawa per la realizzazione dei test locali come misurazioni indirette: questi ultimi risultati sono stati recentemente ottenuti in collaborazione con i miei allievi Giulio Chiribella e Paolo Perinotti [8].

Se inoltre si assume che la purificazione abbia una forma *canonica* continua, allora si vede subito facilmente che la teoria deve essere fortemente convessa, e sopravvivono forse alcune teorie quantistiche incomplete su spazi di Hilbert reali e, forse, i cosiddetti *spin factors*, ovvero le teorie con il convesso degli stati a forma di *iperpalla* (in dimensione $n > 3$, per $n = 3$ la teoria coincide con la meccanica quantistica del qubit).

Infine, un postulato ancora completamente inesplorato (anche perchè di difficile analisi) è l'equivalente del Teorema di David Deutch, ovvero l'esistenza di un controlled-not, ovvero una trasformazione bipartita invertibile mediante la quale si possono ottenere tutti gli stati multi-partiti usando solo questa

trasformazione a due sistemi per volta più trasformazioni locali (per sistemi di dimensionalità $n > 3$ occorrerà un insieme finito di trasformazioni bipartite anzichè una sola trasformazione).

Mi auguro di potervi raccontare la fine della storia in uno dei prossimi incontri.

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Ludwig, *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics I: Derivation of Hilbert Space Structure*, Springer, SPR:adr, 1985.
- [2] G. M. D’Ariano, *Tomographic methods for universal estimation in quantum optics*, IOS Press, Amsterdam, 2002, pp. 385–406, scuola “E. Fermi” on *Experimental Quantum Computation and Information*.
- [3] G. M. D’Ariano, and P. L. Presti, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4195 (2001).
- [4] G. M. D’Ariano, and P. L. Presti, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 047902–1–4 (2003).
- [5] G. M. D’Ariano, *Probabilistic theories: what is special about Quantum Mechanics?*, in *Philosophy of Quantum Information and Entanglement*, Eds A. Bokulich and G. Jaeger (Cambridge University Press, Cambridge UK 2009) (in press)
- [6] M. M. Wolf, D. Perez-Garcia, and C. Fernandez, *Measurements incompatible in Quantum Theory cannot be measured jointly in any other local theory*, eprint 0905.2998 (2009).
- [7] S. Popescu and D. Rohrlich, *Quantum nonlocality as an axiom*, *Found. Phys.* **24** 379 (1994).
- [8] G. Chiribella, G. M. D’Ariano, and P. Perinotti, *Dilation theorem for general probabilistic theories* (unpublished)